Istituzioni di Matematiche
CdL Scienze Biologiche

Argomenti prova in itinere del 4-05-2026

1. inf e sup di insieme
2. limiti di funzioni
3. Campo esistenza ed eventuali Asintoti
4. Immagine di una funzione
5. Continuità e punti di discontinuità
6. Derivabilità e punti di non derivabilità
7. Data una funzione, determinare inf f, sup f estremi relativi e assoluti
8. Punti di flesso
9. Grafico di una funzione

Per lo studio di successioni definite per ricorrenza, è utile il seguente

Principio di Induzione:

Sia P_n una proposizione (affermazione) che dipende da $n \in \mathbb{N}$.

Se P_{n_0} è vera (base dell'induzione), $n_0 \in \mathbb{N}$

Inoltre se riesco a provare che

P_n vera $\Rightarrow$ P_{n+1} vera

Allora concludiamo che (P_n) è vera $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$

Di solito considera $n_0 = 0, 1$.

Integrali indefiniti

Def (Primitiva)

Sia $f: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremo che $f(x)$ è dotata di primitiva se esiste $g: (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

(1) $g(x)$ derivabile in $]a,b[$

(2) $g'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[$

Prop Sia $f(x)$ funzione che ammette primitiva $F(x)$

$\Longrightarrow$ $F(x) + c$ è anch'essa primitiva $\forall c \in \mathbb{R}$

Dim (1) $F(x) + c$ è derivabile

(2) $(F(x) + c)' = F'(x) + (c)' = F'(x) = f(x)$

$\Longrightarrow$ $F + c$ è primitiva di f ∎

Prop Data $F(x)$ una primitiva di $f(x)$, allora

$\forall\, G : (a,b) \to \mathbb{R}$ primitiva di $f(x)$

$\exists\, c \in \mathbb{R}$: $\boxed{G(x) = F(x) + c}$

Dim Basta in realtà provare che, se $F(x)$ e $G(x)$ sono due primitive $\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{F(x) - G(x) = c} \quad \forall x \in (a,b)$$

Richiamo, conseguenza di Lagrange: Ogni funzione su intervallo derivabile con derivata identicamente nulla è costante.

Infatti: (1) $F - G$ è derivabile in $]a,b[$

(2) $\left(F(x) - G(x)\right)' = F'(x) - G'(x)$

$= f(x) - f(x) = 0$

Da Lagrange $\Rightarrow$ $F(x) - G(x) =$ costante

Df Data una funzione $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ dotata di primitive, si definisce l'integrale indefinito di $f(x)$

$$\int f(x)\,dx \overset{def}{:=} \left\{ F : (a,b) \to \mathbb{R} : F(x) \text{ è primitiva di } f(x) \right\}$$

Note (1) l'integrale indefinito è un insieme di funzioni!

quindi quando stabiliremo formule inerenti tale integrale utilizzeremo il principio della doppia inclusione per avere un'uguaglianza insiemistica

(2) Da quanto detto, se F è primitiva di $f(x)$

$$\Rightarrow \quad \int f(x)\,dx = \{ F + c \; : \; c \in \mathbb{R} \}$$

Proprietà:

(i) Linearità

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Dim Basta notare che se $F(x)$ è primitiva di $f(x)$ e $G(x)$ è primitiva di $g(x)$

$\Rightarrow$ (1) $\alpha F + \beta G$ è derivabile

(2) $(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x)$

$= \alpha f(x) + \beta g(x)$

Quindi,

(°) $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x) \pm \int g(x)$

$$(\bullet) \quad \int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$$

Per le operazioni di prodotto / rapporto non abbiamo una formula in generale per l'integrale

<u>Teorema</u> (Integrazione per parti)

Siano $f, g : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ <u>derivabili</u> tale che

$f(x) \cdot g'(x)$ è dotata di primitive

$\Longrightarrow$ $f'(x) \cdot g(x)$ è dotata di primitive, e vale

$$\boxed{\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx}$$

<u>Dim</u> Uguaglianza insiemistica attraverso il principio della doppia inclusione

(1) Provo che $\underbrace{f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)} \subseteq \int f'(x) \cdot g(x)$

Infatti, sia $H(x)$ una primitiva di $f(x) \cdot g'(x)$

e considero

$$\left(f(x) \cdot g(x) - H(x)\right)' = \left(f(x) \cdot g(x)\right)' - H'(x)$$

$$= \left(f'(x) \cdot g(x) + \cancel{f(x) \cdot g'(x)}\right) - \cancel{f(x) \cdot g'(x)}$$

$= \left(f'(x) \cdot g(x) + \cancel{f(x) \cdot g'(x)}\right) - \cancel{f(x) \cdot g'(x)}$

$= f'(x) \cdot g(x)$

$\Longrightarrow f(x) \cdot g(x) - H(x) \in \int f'(x) \cdot g(x)$

(2) Provo che $\int f'(x) \cdot g(x)\,dx \subseteq f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$

Considero $\boxed{H_1(x) \in \int f'(x) \cdot g(x)\,dx}$

dalla inclusione (1) sappiamo già che

$$\boxed{f(x) \cdot g(x) - H_2(x) \in \int f'(x) \cdot g(x)}$$

Se $H_2 \in \int f(x) \cdot g'(x)$

$\Longrightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : H_1(x) = f(x) - g(x) - H_2(x) + c$

$\in f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)$

$\Longrightarrow H_1 \in f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx$

Applicazione dell'integrazione per parti

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int \log^n x\,dx$ usare parti

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad \int \log^n x \, dx$ usare parti

Infatti:

$$\int \log^n x \, dx = \int \underset{f'(x)}{1} \cdot \underset{g(x)}{\log^n x} =$$

$$\overset{(i.p)}{=} x \cdot \log^n x - \int x \cdot (\log^n x)' \, dx$$

$$= x \cdot \log^n x - \int \cancel{x} \cdot (n \cdot \log^{n-1} x) \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx =$$

$$= x \cdot \log^n x - n \int \log^{n-1} x \, dx$$

Esempio $n=1$

(1) $$\int \log x \, dx = x \cdot \log x - 1 \cdot \int (\log x)^0 \, dx$$

$$= x \cdot \log x - \int 1 \, dx =$$

$$= x \log x - x + c$$

(2) $n=2$ $$\int (\log x)^2 dx = x \cdot \log^2 x - 2 \int \log x \, dx$$

$$= x \log^2 x - 2 [x \cdot \log x - x] + c$$

Applicazione 2 - $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int \underset{f(x)}{x^n} \cdot \underset{g'(x)}{e^x}\, dx \overset{(i.p.)}{=} x^n \cdot e^x - \int n \cdot x^{n-1} \cdot e^x\, dx$$

$$= x^n e^x - n \int x^{n-1} \cdot e^x$$

Esempio

$n=1$ $\quad \int x \cdot e^x = x \cdot e^x - 1 \int x^0 \cdot e^x =$

$$= x e^x - \int e^x = x e^x - e^x + c$$

$n=2$ $\quad \int x^2 e^x = x^2 e^x - \int x e^x = x^2 e^x - [x e^x - e^x] + c$

Applicazione 3

$$\int \underset{f(x)}{x^n} \cdot \underset{g'(x)}{\operatorname{sen} x}\, dx \overset{(i.p.)}{=} x^n \cdot (-\cos x) - \int n \cdot x^{n-1} \cdot (-\cos x)$$

$$= -x^n \cos x + n \int \underset{f(x)}{x^{n-1}} \cdot \underset{g'(x)}{\cos x} \overset{(i.p)}{=}$$

$$= -x^n \cos x + n \left[x^{n-1} \operatorname{sen} x - \int (n-1)\, x^{n-2} \cdot \operatorname{sen} x \right]$$

$$= -x^n \cos x + n x^{n-1} \operatorname{sen} x - n \cdot (n-1) \int x^{n-2} \operatorname{sen} x\, dx$$

Esempio $n=2$ $\int x^2 \cdot \sin x \, dx =$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \cdot 1 \cdot \int x^0 \sin x$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \cos x + C$$

Analoga formula si ha per $\int x^n \cos x \, dx$

Applicazione 4.

$$\int \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)} \, dx \overset{(i.p.)}{=} e^x \sin x - \int \underbrace{e^x}_{f(x)} \underbrace{\sin x}_{g'(x)}$$

$$= e^x \sin x - \left[e^x (-\cos x) - \int e^x (-\cos x) \, dx \right]$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x \, dx}_{\text{spostiamolo al 1° membro}}$$

Otteniamo

$$\int e^x \cos x \, dx + \int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$2 \int e^x \cos x \, dx = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$\Rightarrow \int e^x \cdot \cos x \, dx = e^x \frac{(\sin x + \cos x)}{2} + C$$

Esercizio

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_2^3 x - 4 \log_4 x}{\log_2^2 x + 5} = (*)$$

A parte $\log_4 x = (\log_2 4) \cdot \log_2 x = \log_2 2^2 \cdot \log_2 x$

$$= 2 \cdot \log_2 x$$

$$(*) = \lim_{x \to 0} \frac{\log_2^3 x - 4 \cdot 2 \cdot \log_2 x}{\log_2^2 x + 5} = \lim_{x \to 0} \frac{\log_2^3 x - 8 \log_2 x}{\log_2^2 x + 5}$$

chiamo $z = \log_2 x$ $\qquad \lim_{x \to 0} z = \lim_{x \to 0} \log_2 x = -\infty$

$$(CV) = \lim_{z \to -\infty} \frac{z^3 - 8z}{z^2 + 5} = -\infty$$

Esercizio

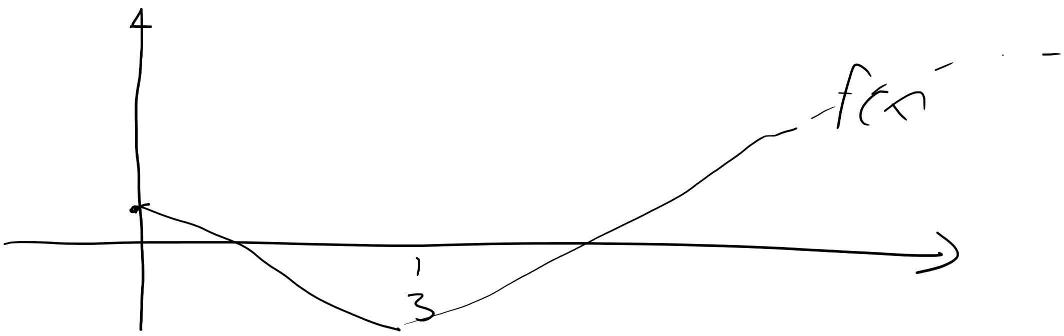
$$A = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n^2+6n-10}, \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Utilizzo le successioni (ossia le funzioni)

Se considero $\quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+6x-10}$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{\log\frac{1}{2}}}_{<0} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+6x-10}}_{>0} (-2x+6) \geq 0$$

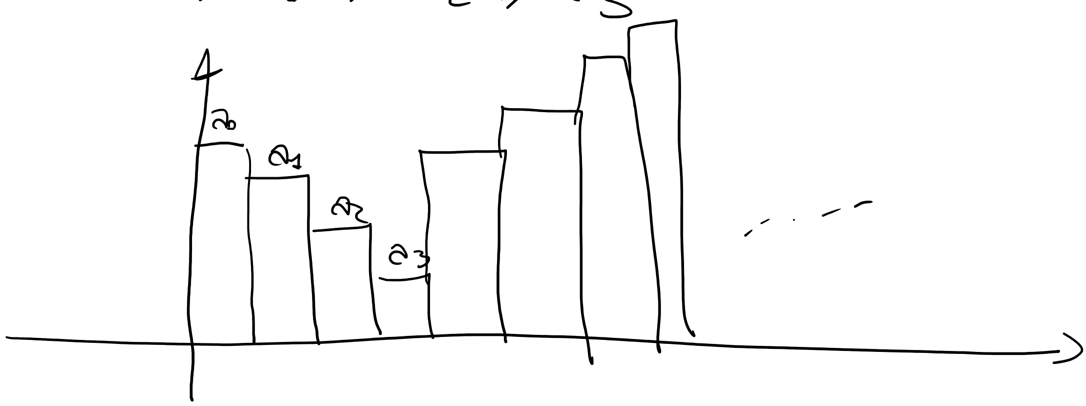
$$\iff \quad -2x+6 \leq 0 \iff x \geq 3$$



ma $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-n^2+6n-10} = f(n) = a_n$

$\implies \quad (a_n)_{n \geq 3}$ è crescente

mentre $\quad a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq a_3$



$$\sup A = \max\left\{a_0 \,,\, \lim_{n\to+\infty} a_n\right\} =$$

$$= \max\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{-10} ,\, \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n^2+6n-10}\right.$$

$$= \max\left\{2^{10} \,,\, +\infty\right\} = +\infty$$

$$\inf A = \min A = a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3^2+18-10}$$

Esercizio

$$f(x) = \frac{|2x^2 - 19x + 44|}{x-6}$$

CE $x \neq 6$ $\quad]-\infty, 6[\ \cup\ ]6, +\infty[$

$$\lim_{x\to 6^-} f(x) = \lim_{x\to 6^-} \frac{|2\cdot 36 - 19\cdot 6 + 44|}{0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 6^+} f(x) = +\infty$$

A parte

$2 \cdot 36 - 19 \cdot 6 + 44 = 72 - 114 + 44 = 116 - 114 = 2$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 6 \\ \hline 11\;4 \end{array}$$

$x = 6$ Asintoto verticale

esplicito il valore assoluto

$2x^2 - 19x + 44 \geq 0$

$\Delta = 19^2 - 4 \cdot 2 \cdot 44 = 361 - 352 = 9$

$$\begin{array}{r} 19 \\ 19 \\ \hline 17\;1 \\ 19 \\ \hline 36\;1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 44 \\ 8 \\ \hline 352 \end{array}$$

ossia

$$|2x^2 - 19x + 44| = \begin{cases} 2x^2 - 19x + 44 & \text{se } x \in]-\infty, 4] \cup [\frac{11}{2}, +\infty[\\ -(2x^2 - 19x + 44) & \text{se } x \in]4, \frac{11}{2}[\end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-19x+44}{x-6}, & x \in \left]-\infty, 4\right] \cup \left[\dfrac{11}{2}, +\infty\right[\\[2ex] \dfrac{-2x^2+19x-44}{x-6}, & x \in \left]4, \dfrac{11}{2}\right[\end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2-19x+44}{x-6} = \pm\infty .$$

ossia $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-19x+44}{x(x-6)} = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-19x+44}{x-6} - 2x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{2x^2} - 19x + 44 - \cancel{2x^2} + 12x}{x-6} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-7x+44}{x-6} = -7$$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 7$ è AOD

A sinistra

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 - 19x + 44}{x(x-6)} = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - 2x] = -7$$

$\Rightarrow \quad y = 2x - 7$ è AOS (anche)

f(x) è continua dalle operazioni -

studio la derivabilità

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(4x-19)(x-6) - (2x^2-19x+44)}{(x-6)^2} & \text{se } x \in]-\infty, 4[\cup]\frac{11}{2}, +\infty[\\ -\dfrac{(4x-19)(x-6) - (2x^2-19x+44)}{(x-6)^2} & \text{se } x \in]4, \frac{11}{2}[\end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 24x - \cancel{19x} + 114 - 2x^2 + \cancel{19x} - 44}{(x-6)^2} & 1^a \text{ parte} \\ \# & 2^a \text{ parte} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 24x + 70}{(x-6)^2} & \text{se } x \in]-\infty, 4[\cup]\frac{11}{2}, +\infty[\\ -\dfrac{2x^2 - 24x + 70}{(x-6)^2} & \text{se } x \in]4, \frac{11}{2}[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4^-} f'(x) = \lim_{x\to 4^-} \frac{2x^2-24x+70}{(x-6)^2} = \frac{2\cdot 16 - 24\cdot 4 + 70}{4}$$

$$= \frac{32 - 96 + 70}{4} =$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x\to 4^+} f'(x) = -\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow x = 4$ è punto angoloso

$$\lim_{x\to \frac{11}{2}^-} f'(x) = \lim_{x\to \frac{11}{2}^-} -\frac{2x^2-24x+70}{(x-6)^2} =$$

$$= -\frac{2\,\frac{11^2}{4} - 12\cdot 11 + 70}{\left(\frac{11}{2}-6\right)^2} =$$

$$= -\frac{\frac{121}{2} - 132 + 70}{\frac{1}{4}} =$$

$$= -4 \cdot \left(\frac{121}{2} - 62\right) =$$

$$= -2 \cdot 121 + 4 \cdot 62 = -242 + 248$$

$$= 6$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{11}{2}^+} f'(x) = -6$$

$\Rightarrow x = \frac{11}{2}$ è punto angoloso

Studio $f'(x) \geq 0$

caso $x \in]-\infty, 4[\cup]\frac{11}{2}, +\infty[$

$$\iff \quad 2x^2 - 24x + 70 \geq 0$$

$$x^2 - 12x + 35 \geq 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 36 - 35 = 1$$

$$x \leq \frac{6-1}{1} \quad \cup \quad x \geq \frac{6+1}{1}$$

$$x \leq 5 \quad \cup \quad x \geq 7$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ cresce $x \in \left]-\infty, 4\right[\cup \left]7, +\infty\right[$

decresce $x \in \left]\frac{11}{2}, 7\right[$

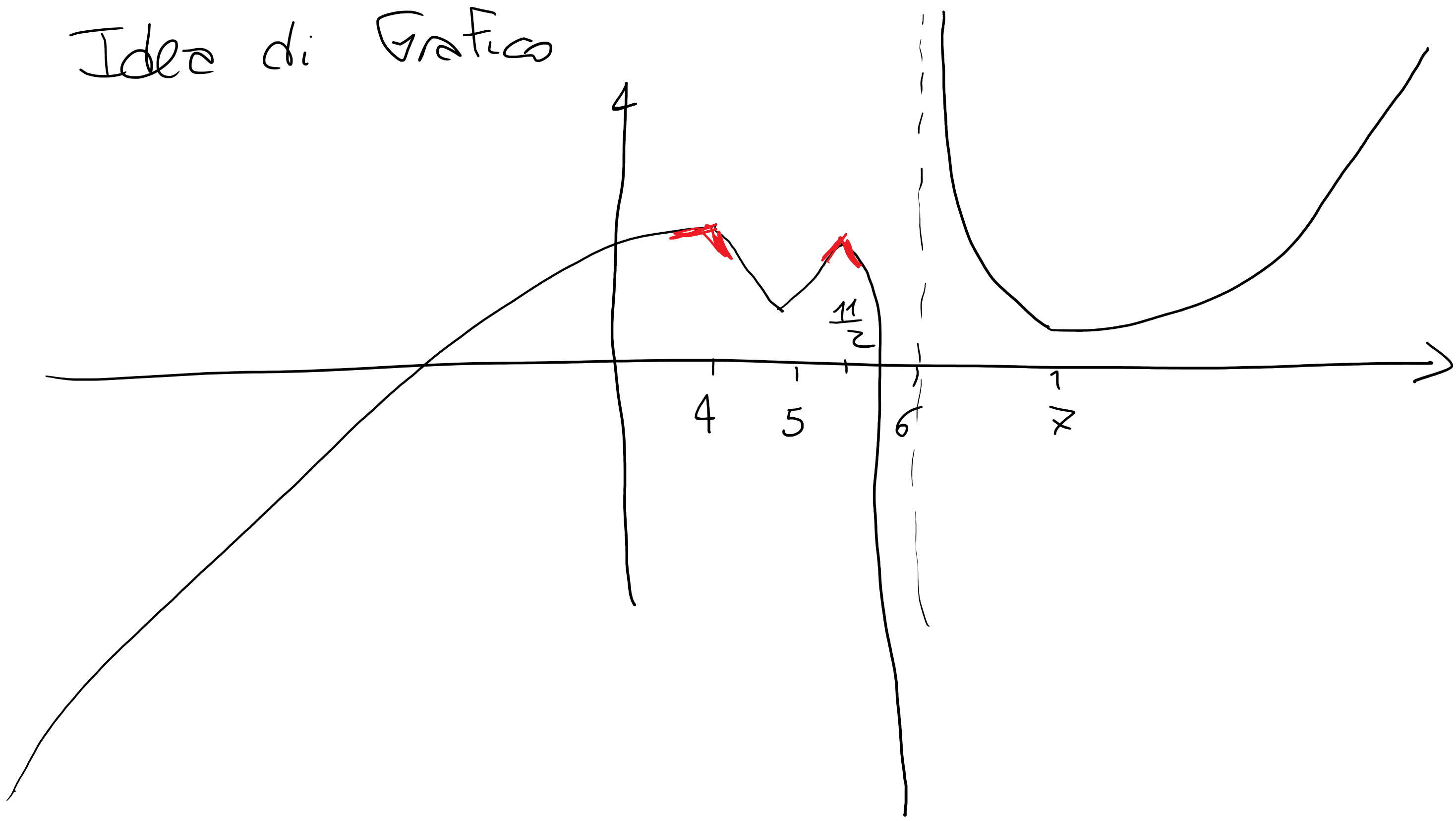
caso $x \in \left]4, \frac{11}{2}\right[$

$$f'(x) \geq 0 \iff 5 \leq x \leq 7$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ cresce $x \in \left]5, \frac{11}{2}\right[$

decresce $x \in \left]4, 5\right[$

Idea di Grafico



<u>Esercizio</u> $\lim \dfrac{2^x - 3}{\;} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$

Esercizio

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ldots}{4x+5} = \left(\frac{\ldots}{+\infty}\right)$$

Ricordo limite notevole

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x^p} = +\infty \qquad a>1,\ \forall p>0$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{2^x}{x}}_{\to+\infty} \cdot \underbrace{\frac{\left(1-\overbrace{\frac{3}{2^x}}^{\to 0}\right)}{4+\underbrace{\frac{5}{x}}_{\to 0}}}_{\to \frac{1}{4}} = +\infty$$

Esercizio
(11-01-2002)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos^2 x}{2^x+2^{-x}} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\cos^2 x}_{\text{limitata}} \cdot \overbrace{\frac{1}{\underbrace{2^x}_{\to+\infty}+\underbrace{\frac{1}{2^x}}_{\to 0}}}^{\to 0} = 0$$

$$0 \le \cos^2 x \le 1$$